Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Расчетно-графическая работа №3

Контрольная работа №3

по линейной алгебре

Вариант №8

Выполнила: Гафурова Фарангиз Фуркатовна

Проверила: Блейхер Оксана Владимировна

Санкт-Петербург. 2023г

1. Выполнить действия в алгебраической форме

Основные формулы:

Пример:

Решение:

Ответ:

1. Разложить многочлен на неприводимые множители

Решение:

Для разложения многочлена на неприводимые множители следует применить метод подбора и проверки корней. В данном случае, так как у многочлена степень 4, мы ищем рациональные корни вида p/q, где p - делитель свободного члена (-18), а q - делитель коэффициента при старшей степени (1).

Возможные значения p: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18.

Возможные значения q: ±1.

Пробуем подставить эти значения в многочлен и проверяем, является ли результат равным нулю:

• Подставляем p = 1, q = 1:

= -11 ≠ 0

• Подставляем p = -1, q = 1:

((-1)4 + (-1)3 - 3((-1)2) + 3(-1) - 18) = -17 ≠ 0

Разделим данный многочлен на (x-2):

|  |  |
| --- | --- |
| x4+x3-3x2+3x-18 | x-2 |
| x4-2x3 | x3+3x2+3x+9 |
| 3x3-3x2 |
| 3x3-6x2 |
| 3x2+3x |
| 3x2-6x |
| 9x-18 |
| 9x-18 |
| 0 |

Таким образом многочлен x4+x3-3x2+3x-18 можно записать следующим образом:

x4+x3-3x2+3x-18 = (x-2) (x3+3x2+3x+9)

Разделим на (x+3) вторую скобку (x3+3x2+3x+9):

|  |  |
| --- | --- |
| x3+3x2+3x+9 | x+3 |
| x3+3x2 | x2+3 |
| 0 |
| 3x |
| 3x+9 |
| 3x+9 |
| 0 |
|  |

У многочлена x2+3 нет действительных корней. Найдем комплексные числа:

x2+3=0

x2=-3

x=±

x = ±3

тогда многочлен x2+3 = (x+3) (x-3)

Запишем результат.

Ответ: x4+x3-3x2+3x-18 = (x-2) (x+3) (x+3) (x-3)

1. Пользуясь свойствами определителей вычислить:

Основные формулы:

Вычисление определителей второго и третьего порядка:

(

Свойства определителей:  
1) определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы;

2) если у определителя строчка (столбец) равен нулю, то и сам определитель нулевой;

3) если в определителе поменять местами две строчки (столбца), то знак определителя поменяется;

4) если в определителе две одинаковых строчки (столбца), то он равен нулю;

5) если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k;

6) определитель, содержащий две пропорциональные строки равен нулю;

7) если все элементы i-ой строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых aij=bi+cj

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки кроме i-ой – такие же как и в заданном определителе, а i-ая строка (столбец) в одном из слагаемых состоит из элементов bi , в другом – из элементов cj;

8) если одна из строк (столбцов) определителя равна линейной комбинации его других строк (столбцов), то определитель равен нулю;

9) определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Разложение определителя по i-ой строке (j-ому столбцу):

где Aij – алгебраические дополнения элемента aij.

Определение: дополнительным минором Mij элемента aij называется минор порядка (n-1), получающийся после вычеркивания из определителя i-ой строки и j-ого столбца. Тогда

– алгебраические дополнения элемента aij.

Пример:

Складываем первую и четвертую строки:

=

Произведем разложение определителя по четвертой строке. В сумму будем включать только ненулевые элементы, т. к. перемножая на ноль и его алгебраическое дополнение в результате получим нулевое слагаемое.

= (-1)4+1 \* 2 = -2 + = -2

Ответ: - 318

1. Доказать совместимость системы:

а) Методом Гаусса.

При решении системы методом Гаусса расширенная матрица системы приводится к треугольному виду. Обратным ходом находятся неизвестные. В матрице можно умножать строчку на число и складывать с другой строчкой, менять строчки местами, менять столбцы местами (при этом нужно переобозначить неизвестные).

Сначала работаем с первой строкой, чтобы получить нули в первом столбце, затем со второй строкой, чтобы получить нули во втором столбце и то же самое с третьей строкой.

б) Методом Крамера.

Решение системы находится по формулам

где

в) Матричным методом.

Систему линейных уравнений можно записать в виде:

где

Домножим уравнение на A-1 слева. Получим

Значит, нашей задачей является найти (обратную матрицу) и перемножить ее с вектором В и мы получим вектор Х, составляющие которого будут являться решением нашей системы.

Формула для нахождения обратной матрицы

где Aij – алгебраические дополнения элемента aij.

Пример:

и решить её

а) методом Гаусса

б) методом Камера  
в) в матричном виде

Решение:

а) Методом Гаусса:

К уравнению 2 прибавляем уравнение 1, умноженное на -2.

Уравнение 1 и 2 поменяем местами, а затем к уравнению 2 прибавляем уравнение 1, умноженное на -2.

К уравнению 3 прибавляем уравнение 1, умноженное на 3, а затем к уравнению 3 прибавляем уравнение 2, умноженное на .

Из 3-го уравнения найдем z:

Из уравнения 2 системы найдем значение переменной y:

Из уравнения 1 найдем x:

Ответ:

б) Методом Крамера:

=

= 2

=

Ответ:

в) Матричным методом:

Найдем

A11 = (-1)1+1 = 14

A12 = (-1)1+2= 17

A13 = (-1)1+3 = 26

A21 = (-1)2+1 = 5

A22 = (-1)2+2 = 4

A23 = (-1)2+3 = 1

A31 = (-1)3+1 = 8

A32 = (-1)3+2 = 18

A33 = (-1)3+3 = 19

A\* =

Ответ:

1. Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений

Определение: система АХ = В называется однородной если столбец свободных членов В=0.

Определение: рангом расширенной матрицы называется максимальное число линейно независимых (ненулевых) строк.

Если ранг расширенной системы равен r, а число уравнений n, то число свободных неизвестных равно (n-r). Определение: элементарными называются следующие преобразования:

1) умножение любой строки матрицы на число;

2) прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на число; Теорема: элементарные преобразования не меняют ранг матрицы. При перемене местами двух строк или двух столбцов (при этом переобзначив переменные) ранг матрицы также остается неизменным.

Пример:

Сначала представим данную систему уравнений в матричной форме: AX = 0, где

~~

Ранг равен 3.

Пусть x4, x5 – свободные неизвестные, тогда

Запишем общее однородное уравнение системы:

Давая свободным неизвестным произвольным числовые значения, мы получаем все решения данной системы.

Пусть x4 = 3, x5 = 4. Подставляя данные значения в общее однородное решение, мы получаем решение данной системы.

Определение: всякая максимально линейно независимая система решений однородной системы уравнений называется ее фундаментальной системой. Если ранг матрицы равен r, а число неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы состоит из n-r решений. В нашем случае r=3, n=5, следовательно фундаментальная система решений (ФСР) будет состоять из 2-х линейно независимых векторов Χ1, Χ2. Чтобы составить ФСР мы должны задать такие значения свободным неизвестным, чтобы определитель из данных значений был ненулевой.

Зададим: X1: x4 = 1, x5 = 0

X2: x4 = 0, x5 = 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| X1 |  |  | 2 | 1 | 0 |
| X2 |  |  | -1 | 0 | 1 |

Данная система решений будет являться базой для любого частного решения. Любой вектор, не входящий в данную систему векторов, будет являться линейной комбинацией из базисных векторов. Проведем иллюстрацию:

Отсюда

Ответ:

1. Образует ли линейное пространство множество векторов с дробными коэффициентами?

Определение: множество V называется линейным пространством, если в нем определены операции сложения (если a ∈V,b ∈V ⇒ (a + b) ∈V ) и умножения на число α (если а ∈V ⇒ αa ∈V ), и введенные операции удовлетворяют аксиомам:

1) a+b=b+a

2) a+(b+c)=(a+b)+c

3) ∃0 : a + 0 = a

4) ∃− a : a + (−a) = 0

5) α(a + b) = αa +αb

6) (α + β)a = αa + βa

7) α(βa) = (αβ)a

8) 1×а=а

Да, множество векторов с дробными коэффициентами является линейным пространством. Для доказательства этого нужно проверить четыре аксиомы: закон сложения, закон умножения на скаляр, ассоциативность сложения и наличие нулевого элемента.

1. Закон сложения: если мы возьмем два вектора u и v из этого множества, и умножим каждый из них на дробное число a и b соответственно, то сумма этих векторов также будет принадлежать данному множеству. Это следует из закона сложения векторов, который работает для любых чисел.

2. Закон умножения на скаляр: если мы возьмем любой вектор из этого множества и умножим его на дробное число a, то результат также будет принадлежать данному множеству. Это следует из закона умножения вектора на число, который также работает для дробных коэффициентов.

3. Ассоциативность сложения: если мы возьмем три вектора u, v и w из данного множества и сложим сначала u и v, а затем прибавим к этой сумме w, то мы получим тот же результат, как если бы мы сначала сложили v и w, а затем добавили к этой сумме u. Это свойство следует из ассоциативности сложения векторов.

4. Наличие нулевого элемента: В данном множестве есть вектор, который состоит из нулей для всех компонент. Этот вектор также будет принадлежать данному множеству.

Таким образом, все четыре аксиомы линейного пространства выполняются для данного множества векторов с дробными коэффициентами, что подтверждает его линейную структуру.

1. Найти разложение вектора d по базису (a, b, c)

Определение: Базисом является максимальная система линейно независимых векторов.

Пример:

, , ,

В нашем случае система состоит из трех векторов (a, b, c), которые составляют базис. Значит любой вектор будет являться линейной комбинацией из данной системы векторов. Вектор d должен линейно зависеть от заданной тройки векторов. Пользуясь определением, можно записать в виде формулы:

Подставляя наши значения получим:

Что можно записать в виде системы:

Решим данную систему методом Крамера:

=

=

=

Ответ:

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A

Определение: многочлен n-ой степени |А – λЕ| называется характеристическим многочленом матрицы А, а его корни называются характеристическими корнями (собственными числами) матрицы А.

Определение: вектор Х называется собственным вектором, если выполняется следующее равенство:

λА = λХ

Х ≠ 0

где λ - собственные числа матрицы А.

Пример:

Найдем характеристический многочлен |А – λЕ| матрицы А. На практике вычитаем из диагональных элементов λ . Получим:

Найдем определитель данной матрицы и вычислим его разложением по первой строке.

Найдем соответствующие им собственные вектора. По определению собственного значения и собственного вектора

Найдем собственный вектор для

Умножив полученную матрицу с вектором получим систему:

= 0 => =>

Проверка: x3-свободная неизвестная. Пусть x3=5, тогда

По определению собственного значения собственного вектора:

АХ = λХ

Подставим в определение найденное собственное число и собственный вектор.

Теперь найдем собственный вектор для

Подставим в определение найденное собственное число и собственный вектор.

Теперь найдем собственный вектор для

Подставим в определение найденное собственное число и собственный вектор.

Ответ: ,

,

,